

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Аддитивная комбинаторика
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.А. Глибичук, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Цель курса - дать основы активно развивающейся науки, которой является аддитивная комбинаторика. Основным объектом изучения аддитивной комбинаторики - сумма двух множеств. В курсе будут покрыты вопросы экстремальной аддитивной теории, которая изучает структуру множеств, у которых сумма мала. Курс покрывает классическую теорему Фреймана, неравенства Плуннеке-Ружи, теорему Воспера, теорему Кнезера и другие вещи, касающиеся в основном экстремальной аддитивной теории.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение аддитивной комбинаторики.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области аддитивной комбинаторики;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области аддитивной комбинаторики;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области аддитивной комбинаторики.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
ОПК-4 Способен комбинировать и адаптировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-4.1 Умеет применять информационно-коммуникационные технологии для поиска и анализа профессиональной информации, выделения в ней главного, структурирования, оформления и представления в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации модели программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

фундаментальные понятия, законы аддитивной комбинаторики;  
современные проблемы соответствующих разделов аддитивной комбинаторики;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач аддитивной комбинаторики.

уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач аддитивной комбинаторики;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов аддитивной комбинаторики;  
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Группы полиномиального роста.		10		6
2	Группы, порождённые автоматами.		15		6
3	Классификация автоматных групп с двумя состояниями и алфавитом $\{0, 1\}$ .		10		6
4	Метод Нильсена.		15		6
5	Неравенство Плюннеке.		10		6
Итого часов			60		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Группы полиномиального роста.

Рост сложности группы.

2. Группы, порождённые автоматами.

Действия на корневых деревьях.

3. Классификация автоматных групп с двумя состояниями и алфавитом  $\{0, 1\}$ .

Теорема Баллога-Семереди-Гауэрса. Старшие энергии, структурные теоремы.

4. Метод Нильсена.

Его геометрическая интерпретация.

5. Неравенство Плюннеке.

Простейшие соотношения между размерами сумм множеств.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Стандартная учебная аудитория.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 248 с.
2. Комбинаторика и информация [Текст]. Ч. 2, Информационные модели / В. К. Леонтьев ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ,2016
3. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] / А. М. Райгородский - М.МФТИ,2012
4. Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский ; Летняя школа "Современная математика", Дубна, июль 2008 г. — М. : МЦНМО, 2011 .— 28 с.
5. Основы комбинаторики и теории чисел [Текст] : сборник задач : учеб. пособие для вузов / А. А. Глибичук [и др.] .— Долгопрудный : Изд. Дом "Интеллект", 2015 .— 104 с.

### **Дополнительная литература**

1. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2007 .— 144 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

<http://web.stanford.edu/class/ee364b/lectures.html>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	А.А. Глибичук, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
ОПК-4 Способен комбинировать и адаптировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-4.1 Умеет применять информационно-коммуникационные технологии для поиска и анализа профессиональной информации, выделения в ней главного, структурирования, оформления и представления в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации модели программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Аддитивная комбинаторика» обучающийся должен:

### знать:

фундаментальные понятия, законы аддитивной комбинаторики;  
 современные проблемы соответствующих разделов аддитивной комбинаторики;  
 понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
 основные свойства соответствующих математических объектов;  
 аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач аддитивной комбинаторики.

### уметь:

понять поставленную задачу;  
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач аддитивной комбинаторики;  
 оценивать корректность постановок задач;  
 строго доказывать или опровергать утверждение;  
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

**владеть:**

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов аддитивной комбинаторики;  
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль

Вопрос 1. Неравенство треугольника Ружи.

Вопрос 2. Аддитивная энергия. Оценки на аддитивную энергию. Доказательство утверждения о том, что множество с маленькой суммой имеет большую аддитивную энергию.

Задача 1. Given an arbitrary abelian group  $G$ . For any subgroup  $H \leq G$  and any subset  $S$  denote  $S/H := \{s + H : s \in S\} \subseteq G/H$ . Suppose that  $A$  и  $B$  are arbitrary nonempty subsets of the group  $G$  and  $H = H(A + B)$ . Prove that either  $|A + B| > |A| + |B|$ , or  $|(A + B)/H| = |A/H| + |B/H| - 1$ .

Задача 2. Выведите из теоремы Кнезера следующее утверждение: Пусть  $m > 2$  и  $A, B$  непустые подмножества  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Если  $0 \notin B$  и  $(b, m) = 1$  для любого элемента  $b \in B \setminus \{0\}$ , то  $|A + B| > \min\{m, |A| + |B| - 1\}$ . Эта теорема была доказана И. Човлой и носит его имя. Задача 3. Для любых непустых конечных подмножеств  $A$  и  $B$  произвольной абелевой группы  $G$  доказать, что эквивалентны следующие утверждения: 1)  $|A + B| = |A||B|$ . 2)  $|A \cdot B| = |A||B|$ . 3)  $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 + b_1 = a_2 + b_2\}| = |A||B|$ . 4)  $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 b_1 = a_2 b_2\}| = |A||B|$ . 5)  $|A \setminus (x + B)| = 1$  для любых  $x \in A + B$ . 6)  $|A \setminus (B + y)| = 1$  для любых  $y \in A + B$ . 7)  $(A \cap A)(B \cap B) = \{0\}$ .

Задача 4. Рассмотрим два произвольных конечных подмножества  $A, B$  произвольного поля  $F$ , состоящих по меньшей мере из двух элементов. Докажите, что для произвольного ненулевого элемента  $c \in F$  неравенство  $|A + cB| < |A||B|$  выполнено тогда и только тогда, когда найдутся элементы  $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$ , такие, что  $c = a_1 a_2^{-1} b_2 b_1^{-1}$ . Напомним, что множество  $cB = \{c \cdot b : b \in B\}$ .

Задача 5. Рассмотрим произвольное конечное поле  $F$  и любое его подполе  $P \subseteq F$ . Докажите, что для произвольных ненулевых элементов  $c, d \in F \setminus \{0\}$  множество  $A = c + dP$  удовлетворяет равенствам  $|A + A| = |A|$  и  $|A \cdot A| = |A|$  одновременно тогда и только тогда, когда  $c \in dP$ .

Задача 6. Докажите, что некоторое подмножество  $A$  поля  $F$  ( $|A| > 2, |F| > 2$ ) удовлетворяет равенствам  $|A \cdot A| = |A|$  и  $|A + A| = |A|$  одновременно тогда и только тогда, когда  $A$  есть мультипликативный сдвиг некоторого подполя  $P \subseteq F$ , то есть существуют элемент  $c \in F$ , такие, что  $A = cP$ .

Задача 7. Пусть  $p$  произвольное простое число и  $c_1, c_2, \dots, c_k$  любые ненулевые коэффициенты из  $\mathbb{Z}_p$ . Рассмотрим функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1 x_1 + c_2 x_2^2 + \dots + c_k x_k^k$ . Докажите, что сравнение  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv n \pmod{p}$  разрешимо для любого  $n$ .

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Введение. Простейшие соотношения между размерами сумм множеств. Неравенство Плуннеке. Универсальные множества.
2. Структура множеств с малым удвоением. Леммы о покрытиях. Теорема Фреймана в группах с кручением.
3. Анализ Фурье на абелевых группах. Равномерные множества первого порядка. Теорема Рота.



4. Лемма регулярности Семереди. Теорема Ружи-Семереди о треугольниках.
5. Большие тригонометрические суммы.
6. Свойства множеств Бора.
7. Почти периодичность сверток характеристических функций. Арифметические прогрессии в суммах множеств.
8. Теорема Фреймана, полиномиальная гипотеза Боголюбова — современные оценки.
9. Теорема Балоба-Семереди-Гауэрса. Старшие энергии, структурные теоремы.
10. Конструкция Беренда множеств без решений аффинных уравнений. Верхние оценки.
11. Нормы Гауэрса, равномерные множества старших порядков.
12. Теорема Семереди-Троттер, выпуклые множества. Суммы произведений : вещественный случай.

Темы для курсовых работ:

1. Суммы произведений: конечные поля, равномерная распределенность мультипликативных подгрупп.
2. Проблема Какея.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.